225	Systèmes différentiels linéaires du 1er ordre à coefs constants. Ecriture matricielle. Exemples.	Variation de la constante.	Monier 4 p.196 Gourdon, Sorosina.

K=ℝ ou ℂ. n∈ℕ*. $D_n(K)$: Matrices diagonales à coefs ∈K.

I. Définition, premières propriétés.

A. Définition, notations.

Def 1: Soient I intervalle de ℝ, $A\in M_n(K)$, $B:I\to M_{n,1}(K)$ continue sur I. On appelle **système différentiel linéaire** du 1er ordre à coefficients constants l'équa diff (E): $X'(t)=A.X(t)+B(t)$, d'inconnue $X:I\to K^n$ dérivable sur I.

(E_0): $X'(t)=A.X(t)$ est appelée système différentiel linéaire **homogène associé.**

Par abus de langage on dira parfois "équation linéaire" au lieu de "système linéaire".

Notation: On notera **S** l'ensemble des solutions de (E) sur I, et $\mathbf{S_0}$ celui de (E_0).

B. Problème de Cauchy-Lipschitz.

Th 1: Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (1) .

Soit $(t_0, X_0)\in I\times K^n$. Le problème de Cauchy: $(C)\begin{cases} X'(t)=A.X(t)+B(t) \\ X(t_0)=X_0\end{cases}$ admet une solution et une seule sur I, et toute solution de (C) est une restriction de cette solution sur I.

C. Structure de S_0 et S.

Prop 1: Pour tout $t_0\in I$, l'application $\theta_{t_0}:\begin{vmatrix} S\to K^n \\ X\mapsto X(t_0)\end{vmatrix}$ est bijective.

Prop 2:

1) S_0 est un K-**espace vectoriel** de dimension n, et $\begin{vmatrix} S_0\to E \\ X\mapsto X(t_0)\end{vmatrix}$ est un isomorphisme de K-ev.

2) S est un K-**espace affine** de direction S_0, et $\begin{vmatrix} S\to E \\ X\mapsto X(t_0)\end{vmatrix}$ est un isomorphisme de K-espaces affines.

La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E).

II. Résolution.

A. Résolution de (E_0).

Vu la structure de S_0, si l'on dispose d'une famille libre de n solutions X_i, alors c'est une base de S_0 et l'on a:

$$S_0=\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \,/\, (\lambda_1,\dots\lambda_n)\in K^n\right\}.$$

a) Cas où A est diagonalisable. (2)

Th 2: Soit $A\in M_n(K)$ diagonalisable. La solution générale de (E_0): $X'(t)=A.X(t)$ est définie par:

$$\forall t\in I,\ \ X(t)=\sum_{i=1}^n c_i.e^{\lambda_i t}.V_i\ ,\ \text{où:}$$

$\lambda_1,\dots\lambda_n$ sont les valeurs propres de A

$V_1,\dots V_n$ est une base de vect. propres associés

$c_1,\dots c_n\in K$ quelconques.

Le calcul de P^{-1} est inutile.

Si K=ℝ et A diagonalisable, mais seul[t] ds $M_n(\mathbb{C})$, on obtient les solutions de (E_0) à valeurs ℂ, et on en déduit celles à valeurs ℝ.

Exemple 1: X'=AX, où $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

b) Cas où A est trigonalisable. (3)

Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Donc quitte à se placer dans $M_n(\mathbb{C})$, cette méthode est toujours utilisable.

Prop 3: Si A est trigonalisable, résoudre (E_0) revient à résoudre un système différentiel en cascade.

Le calcul de P^{-1} est inutile.

Exemple 2: $\begin{cases} x'=5x-3y-4z \\ y'=-x+y-2z \\ z'=x-3y\end{cases}$

B. Résolution de (E).

a) Si l'on a une solution "évidente".

Exemple 3: Le système $\begin{cases} x'=x+y-z-1 \\ y'=x-y+z-1 \\ z'=-x+y+z-1\end{cases}$ admet la solution évidente x=1; y=1; z=1.

b) Si le second membre est une somme de produits d'exponentielles par des polynômes.

Exemple 4: $\begin{cases} x'=3x-2y-4z+te^t-t \\ y'=-2x+3y+2z+te^t-2t+2 \\ z'=3x-3y-4z-1\end{cases}$

A est diagonalisable, et notant $A=PDP^{-1}$, on fera le changement de variable $Y=P^{-1}X$ qui nous ramène à des équa diffs scalaires 1er ordre.

Le calcul de P^{-1} est nécessaire

c) Principe de juxtaposition des solutions.

Si le second memebre peut se décomposer en une somme de "seconds membres plus simples" $B=B_1+\dots+B_N$, on résout chaque $X'(t)=A.X(t)+B_i(t)$, et si on note X_i sa solution, on a $X=\sum_i X_i$ solution de (E).

d) Méthode de variation de la constante.

Th 3: Supposons connue une base $(y_1, \ldots y_n)$ de S_0.
Il existe au moins une solution y de (E) de la forme

$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, où les λ_i $(1 \le i \le n)$ sont des applications C^1 de I dans K. (4) . Monier 4 p.194-195.

III. Intervention de l'exponentielle de matrice (GOU p.354).

Def 2: Pour $A \in M_n(K)$, on note:

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Prop 4: Soit $A \in M_n(K)$.
L'équation différentielle (E_0): $X'(t) = A.X(t)$
a ses solutions maximales (5) définies sur ℝ, et la solution prenant une valeur donnée $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en t=0 est: X: ℝ → ℝ; $t \mapsto e^{tA} X_0$.

<u>Exemple 5</u>: (Sorosina ex 10.25 p.328).

$$\begin{cases} x' = -x + ay + az \\ y' = -x - y \\ z' = x - z \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

La résolution de l'équation avec second membre (E): $X' = A.X + B$ se traite par variation de la constante, et le solution générale en est:

$$t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds.$$ (Monier 4 p.203)

On utilise cette méthode lorsque les puissances successives de A sont "faciles à calculer".

IV. Application aux équations différentielles scalaires d'ordre p à coefficients constants (Gou p.351).

Def 3: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Toute équa. diff. sur K^n du type:

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t) Y^{(p-1)} + \ldots + A_0(t) Y + B(t) \quad \text{(L)}$$

où $A_{p-1}, \ldots, A_0$ sont des fonctions continues de I → $M_n(K)$, et B: I → K^n une fonction continue quelconque, est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre p.**

Prop 5: On peut ramener l'étude de ce type d'équation à celle d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
il suffit de considérer:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}}_{B}$$

Et l'étude précédente s'applique donc à toutes les équations différentielles linéaires, quel que soit leur ordre.

V. Notes.

(1) Le **"vrai" th. de Cauchy-Lipschitz** linéaire prend pour hypothèse A: I → L(E), t ↦ A(t) <u>continue</u>.
(Coefs non nécessairement constants).

(2) A **diagonalisable** dans $M_n(K)$
⇔ $E = \oplus E_\lambda$
⇔ $P_A(X)$ scindé <u>à racines simples</u> sur K
⇔ ∃P scindé à rac. sples annulateur de A.

(3) A **trigonalisable** dans $M_n(K)$
⇔ $P_A(X)$ scindé sur K,
toujours vrai si K est algébriquement clos (par ex. K=ℂ).

(4) Cet énoncé du **Th. de variation de la constante** est valable pour toute équa. diff. linéaire du 1er ordre, y compris à coefs non constants: hypothèse A: I → L(E), t ↦ A(t) <u>continue</u>, comme pour Cauchy-Lipschitz, Cf. note (1) .

(5) **Solutions maximales**: (Gourdon p.348).
Une fonction φ: I⊂ℝ →K^n est dite solution maximale de (E) s'il n'existe pas d'autre solution Ψ: J⊂ℝ → K^n telle que: I⊂J, I≠J.